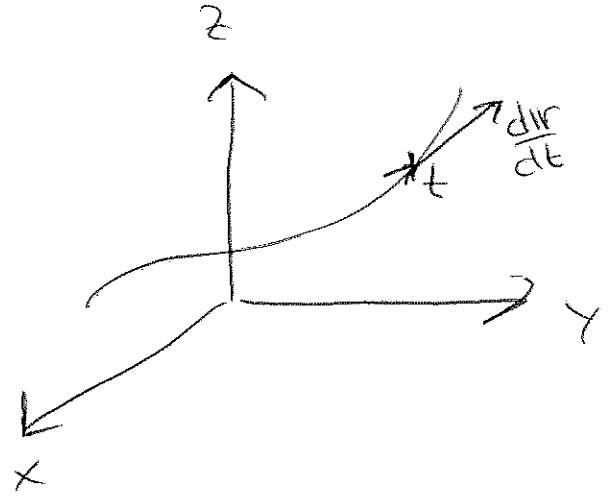
Sammanfattning av TMA044

(Daniel Persson)

× Parametrisering av kurvor i $\mathbb{R}^3$



Varje punkt t på kurvan motsvarar en punkt $(x(t), y(t), z(t))$ i $\mathbb{R}^3$

Vi beskriver ofta detta med en positionsvektor:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

× Vi kan tänka på $\mathbf{r}(t)$ som positionsv. för en partikel som rör sig i $\mathbb{R}^3$.

- hastighet $\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$

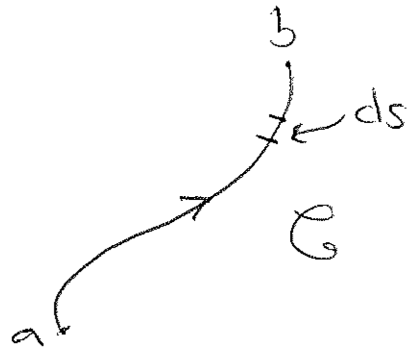
  (tangentvektorn till kurvan i punkt t)

- farten $v = |\mathbf{v}| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$

- acceleration $\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$

* Längden på ett segment av en kurva kan beräknas med:

$$\text{längd}(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} ds$$



Om vi parametriserar kurvan blir detta

$$\text{längd}(\mathcal{C}) = \int_a^b \left| \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right| dt$$

OBS! Detta är oberoende av val av parametrisering!

* Funktioner $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Partiell derivata: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_1$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f_2$$

Om $x = x(u,v)$ & $y = y(u,v)$ har vi kedjeregeln

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = f_1 x_1 + f_2 y_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = f_1 x_2 + f_2 y_2$$

* f är <u>kontinuerlig</u> i (a,b) om

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

* f är <u>differentierbar</u> i (a,b) om

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,b+k) - f(a,b) - h f_1(a,b) - k f_2(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

* Vi säger att

$$f(x,y) \approx L(x,y) = f(a,b) + f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b)$$

är linjäriseringen av $f(x,y)$ i punkten (a,b).

* Linjäriseringen ger den första ordningens Taylorapproximation till $f(x,y)$. ~~[illegible]~~

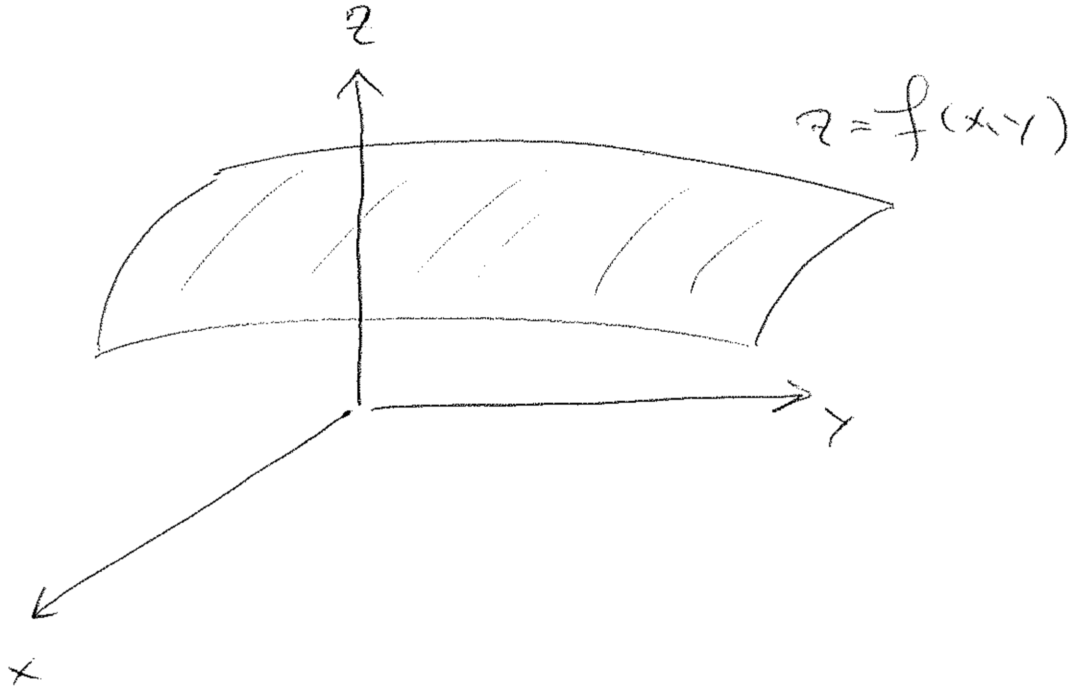
Om vi definierar

$$h = x-a \quad \& \quad k = y-b$$

kan vi skriva Taylorpolynomet av f upp till andra ordningen som:

* $$f(h+a, k+b) \approx f(a,b) + h f_1(a,b) + k f_2(a,b) + \frac{1}{2}\left(h^2 f_{11}(a,b) + 2hk\, f_{12}(a,b) + k^2 f_{22}(a,b)\right)$$

* Om vi sätter $z = f(x,y)$ så beskriver detta en yta i $\mathbb{R}^3$: Detta är <u>grafen till $f(x,y)$</u>.



x Tangentplanet till $z = f(x,y)$ i en punkt (a,b) beskrivs med ekvationen

$$z = \underbrace{f(a,b) + f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b)}_{\text{linjärisering } L(x,y) \text{ av } f(x,y) \text{ i punkten } (a,b).}$$

* Mer allmänt kan vi beskriva ytor i $\mathbb{R}^3$ som nivåytor. Givet en funktion

$$G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

motsvaras nivåyta till G av

$$G(x,y,z) = 0. \quad \left(\begin{array}{c}\text{eller mer} \\ \text{allmänt en} \\ \text{godtycklig konst}\end{array}\right)$$

* Tangentplanet till nivåytan i en punkt (a,b,c) beskrivs då av ekvationen:

$$0 = G_1(a,b,c)(x-a) + G_2(a,b,c)(y-b) + G_3(a,b,c)(z-c)$$

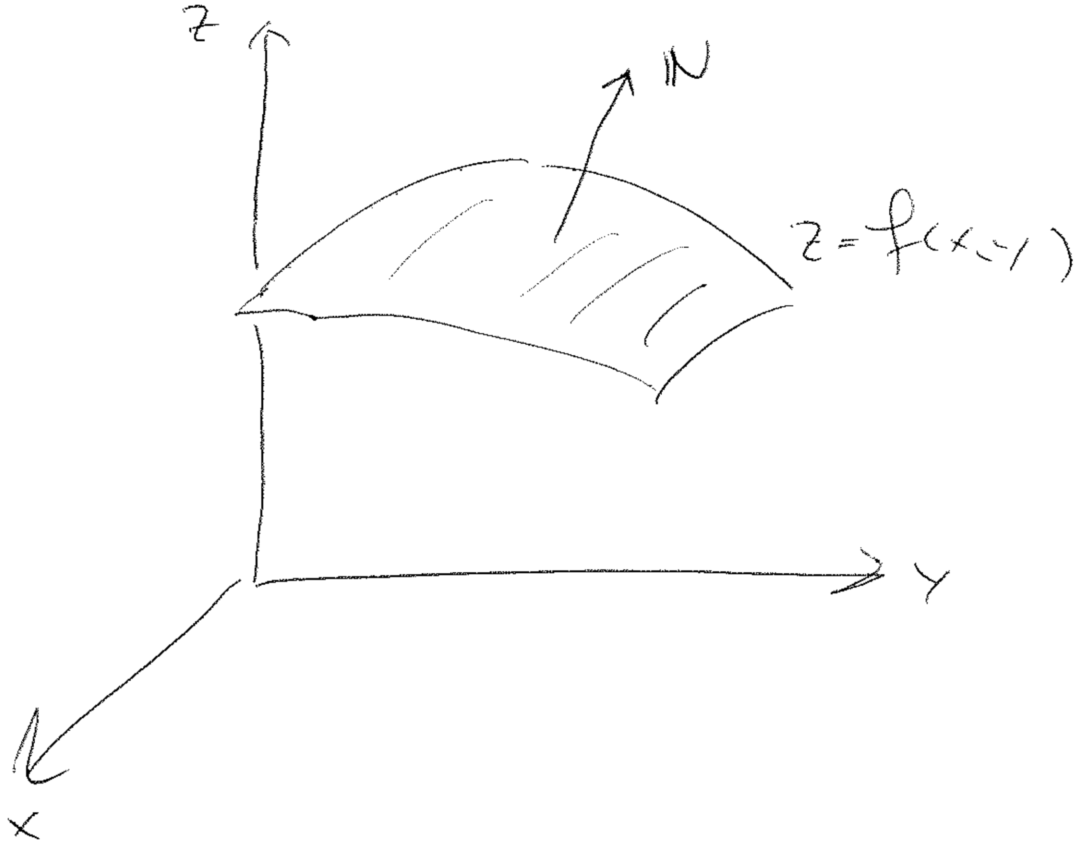
* Om $G(x,y,z) = f(x,y) - z$ så reduceras detta till fallet av en graf $z = f(x,y)$:

$c = f(a,b)$

$$0 = f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b) \underset{G_3(a,b,c) = -1}{-} (z - f(a,b))$$

* Tangentplanet till en funktionsyta $z = f(x,y)$ har normalvektor:

$$\mathbb{N} = f_1(a,b)\,\mathbb{i} + f_2(a,b)\,\mathbb{j} - \mathbb{k}$$



* För en nivåyta $G(x,y,z) = 0$ ges en normal av gradienten till G:

$$\mathbb{N} = \nabla G = \frac{\partial G}{\partial x}\mathbb{i} + \frac{\partial G}{\partial y}\mathbb{j} + \frac{\partial G}{\partial z}\mathbb{k}$$

* Riktningsderivata av $f(x,y)$ i riktning u ($\|u\|=1$) ges av

$$D_u f(x,y) = u \cdot \nabla f(x,y)$$

* En <u>kritisk punkt</u> till $f(x,y)$ är alla lösningar till ekvationssystemet

$$\nabla f(x,y) = (0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

* En funktion $f(x,y)$ har lokalt eller globalt extremvärde ~~på~~ i (a,b) en domän D om och endast om något av följande gäller.

a) (a,b) är en kritisk punkt

b) (a,b) är en singulär punkt
($\nabla f(a,b)$ existerar ej)

c) (a,b) tillhör randen ∂D.

* Vi kan klassificera kritiska punkter genom att studera Hessianen till f:

$$H(f) = \underbrace{D(\nabla f)}_{\text{Jacobianen av gradienten}} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$$

<u>4 fall:</u>

$\det H > 0$, $f_{11} > 0$ $\rightarrow$ lokalt min.

$\det H > 0$, $f_{11} < 0$ $\rightarrow$ lokalt max

$\det H < 0$ $\rightarrow$ sadelpunkt

$\det H = 0$ $\rightarrow$ ingen info

* Steg-för-steg process för att hitta alla extremvärden av f på en domän D.

(1) Kontrollera om f har singulära punkter

(2) Hitta alla kritiska punkter: lös $\nabla f = (0,0)$

(3) Parametrisera randkurvan ∂D och sök kritiska punkter på randen.

* Lagranges metod: sök extremvärden för $f(x,y)$ givet ett bivillkor $g(x,y)=0$.

$\Rightarrow$ Sök kritisk punkt till

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

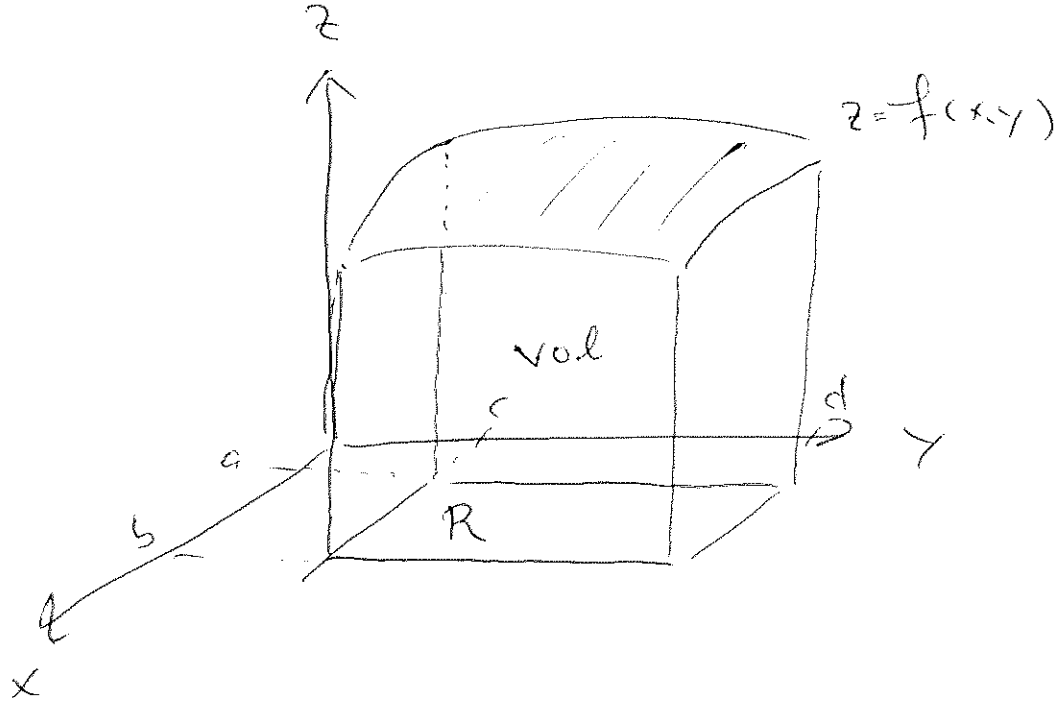
Ofta en lättare metod än att parametrisera kurvan $g(x,y)=0$.

* Dubbelintegraler

$$\iint_R f(x,y)\,dA$$

ger volymen under grafen

$z = f(x,y)$

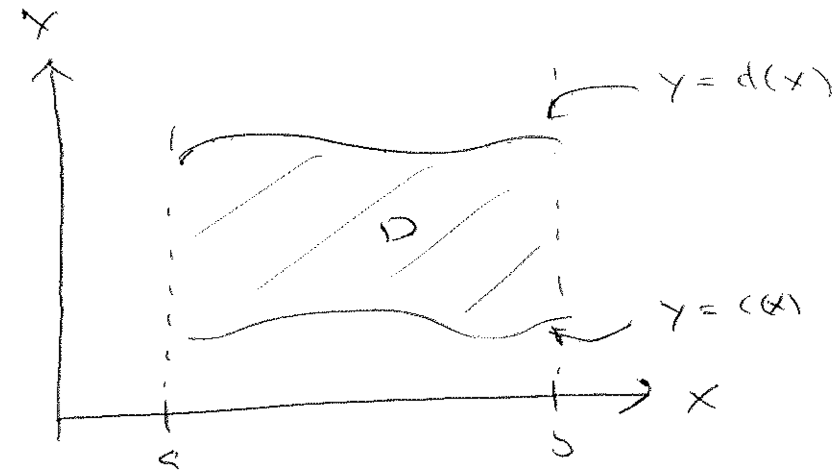


* Fubinis sats:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy$$

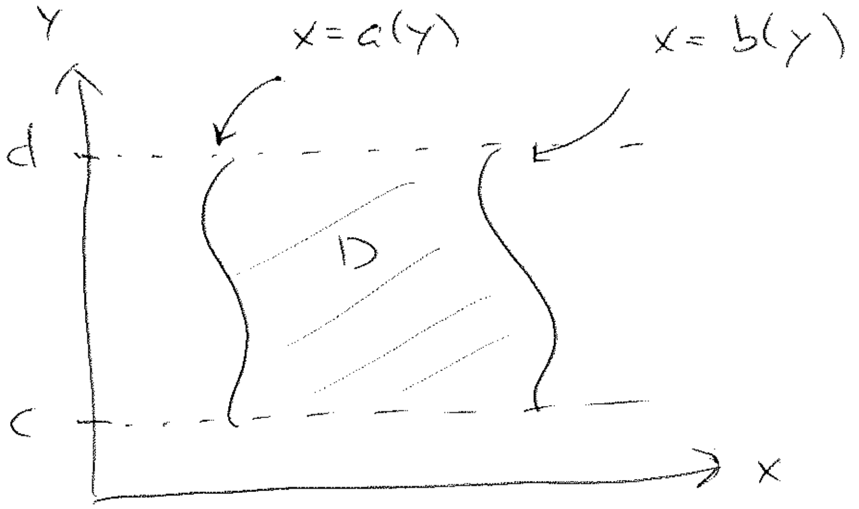
$$= \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx$$

* Mer allmänna domäner



$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy$$

* eller



$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d dy \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx$$

* Medelvärdessatsen
Om f är kont på D
så existerar en punkt $(x_0, y_0) \in D$
så att

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \underbrace{f(x_0,y_0)}_{} \cdot \text{arean}(D)$$

kallas "medelvärdet" av f
och betecknas $\bar{f}$.

* Under variabelbytet

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

tar integralen formen:

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_R g(u,v) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv$$

$\longrightarrow$

där $\quad g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$

och $\left| \frac{\partial(x(y,v))}{\partial(u,v)} \right|$ är absolutbeloppet

av determinanten:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

* För polära koordinater:

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

ger detta:

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_R g(r,\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a g(r,\theta)\, r\,dr$$

* Trippelintegraler

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dV$$

beräknar "hypervolymen" under grafen till $w = f(x,y,z)$ i $\mathbb{R}^4$

* Mer fysikaliskt kan det tolkas som massan av en solid med densitetsfunktion $f(x,y,z)$.

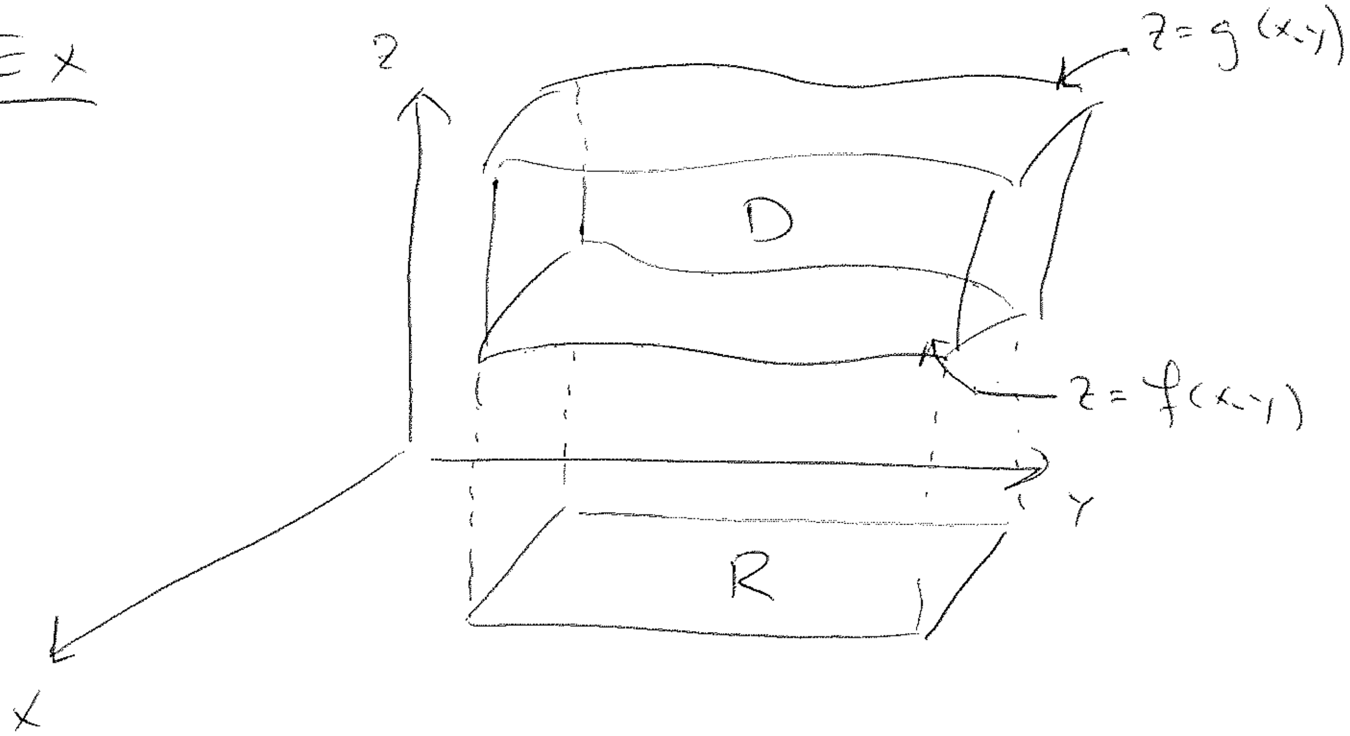
* Vi kan beräkna trippelintegraler med iterering precis som för dubbelintegraler:

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dV = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{z_0}^{z_1} dz\, f(x,y,z)$$

eller annan valfri ordning.

* För mer komplicerade domänen där gränserna ej är fixerade måste vi "slice" precis som för dubbelintegral.

<u>Ex</u>



$$\Rightarrow \iiint_D G(x,y,z)\,dV = \iint_R dx\,dy \int_{f(x,y)}^{g(x,y)} G(x,y,z)\,dz$$

* För ett allmänt variabelbyte har vi:

$$\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$$

* $$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_R g(u,v,w) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| du\,dv\,dw$$

* För sfäriska koordinater:

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \sin\varphi \end{cases}$$

får vi

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{a} g(\rho,\theta,\varphi)\,\rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

* Vektorfält $\mathbb{F}(x,y,z) = (F_1, F_2, F_3)$ associerar en vektor $\mathbb{F}(x,y,z)$ med varje punkt $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

* Fältlinjerna är de kurvor i $\mathbb{R}^3$ för vilka varje tangentvektor motsvarar ~~en~~ ~~en~~ någon vektor $\mathbb{F}(x,y,z)$.

Fältlinjesekvationer:

$$\boxed{\frac{dx}{F_1} = \frac{dy}{F_2} = \frac{dz}{F_3}}$$

Kan lösas genom integrering?

* Ett vektorfält är konservativt om det kan skrivas som

$$\mathbb{F} = \nabla \phi$$

för någon skalär funktion $\phi(x,y,z)$.

* Villkor för existens av ϕ så att $\nabla \phi = \mathbb{F}$:

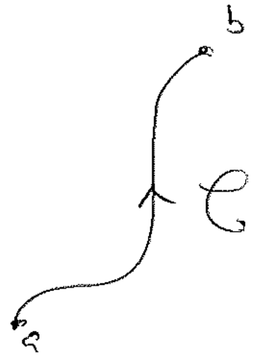
$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{\partial F_2}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial F_1}{\partial z} = \dfrac{\partial F_3}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial F_2}{\partial z} = \dfrac{\partial F_3}{\partial y} \end{cases}$$

* Nivåytorna $\phi(x, y, z) = \text{konst.}$ kallas <u>ekvipotentialytor</u>.

De är <u>alltid vinkelräta</u> <u>mot fältlinjerna</u>.

* Kurvintegraler generaliserar kurvlängden:

$$\int_{\mathcal{C}} f(x,y,z)\, ds$$



* Kan beräknas genom att parametrisera $\mathcal{C}$: $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}} f(x,y,z)\, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt$$

* Arbetet som uträttas av ett vektorfält längs $\mathcal{C}$ ges av linjeintegralen:

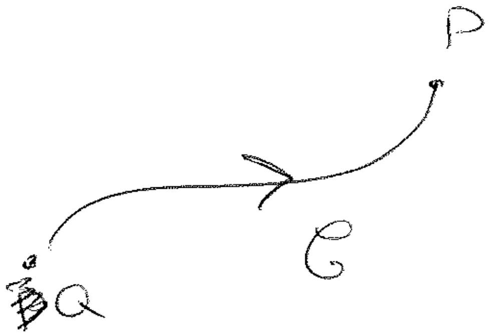
$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz$$

* Om vi parametiserar $\mathcal{C}$ ger detta

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \int_a^b \Big(F_1(\mathbb{r}(t))\, x'(t) + F_2(\mathbb{r}(t))\, y'(t) + F_3(\mathbb{r}(t))\, z'(t) \Big)\, dt$$

* Om $\mathbb{F}$ är konservativt får vi

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \int_{\mathcal{C}} \nabla \phi \cdot d\mathbb{r} = \phi(P) - \phi(Q)$$



* Satsen om arbetets vägoberoende säger att följande påståenden är ekvivalenta:

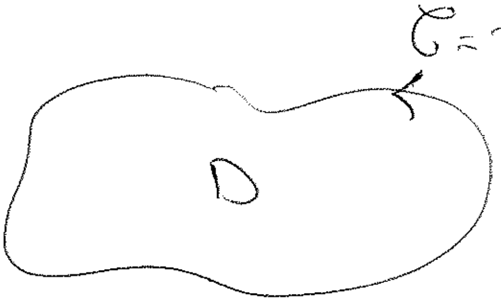
a) $\mathbb{F}$ är konservativt

b) $\oint_{\mathcal{C}} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = 0$ för alla styckvis glatta kurvor $\mathcal{C}$. (i domänen D)

c) $\int_{\mathcal{C}} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$ har samma värde oberoende av vilka kurva i D vi väljer mellan två punkter. (förutsatt att orienteringen är samma)

* Greens formel:

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA = \oint_{\mathcal{C} = \partial D} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$$



* Om vi definierar:

$$\text{curl}\,\mathbb{F} = \nabla \times \mathbb{F}$$

så kan greens formel skrivas

$$\iint_D (\text{curl}\,\mathbb{F}) \cdot \mathbb{k}\, dA = \oint_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$$

* Om $\mathbb{F}$ kan skrivas som

$$\mathbb{F} = \nabla \times \mathbb{A}$$

för någon vektor $\mathbb{A}$ så är $\mathbb{A}$ en <u>vektorpotential</u> till $\mathbb{F}$.

* En annan typ av derivata på $\mathbb{F}$ är divergensen:

$$\text{div}\, \mathbb{F} = \nabla \cdot \mathbb{F}$$

* Vi har följande användbara identiteter:

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbb{F}) = 0 \\ \nabla \times (\nabla \phi) = 0 \end{cases}$$

* Greens formel kan användas för att beräkna arean av en sluten domän D.

Kom ihåg att i allmänhet kan arean beräknas med:

$$\text{area}(D) = \iint_D dA$$

Vänsterledet i Greens formel tar precis denna form om vi väljer vektorfältet $\mathbb{F}$ så att

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1$$

Tex kan vi ta:

$$\mathbb{F}(x,y) = \frac{1}{2}\left(-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}\right)$$

(ej konservativ!)

Green's formel ger då ett uttryck för area i form av en linjeintegral:

$$\text{area}(D) = \iint_D dA = \oint_{\partial D = \mathcal{C}} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$$

$$= \oint_{\mathcal{C}} F_1 dx + F_2 dy$$

$$\Rightarrow \text{area}(D) = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}} (x dy - y dx)$$

Vi kan nu beräkna area genom att parametrisera $\mathcal{C}$.

För en cirkel får vi t.ex: $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \end{cases}$

$$\Rightarrow \text{area}(\bigcirc) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta) d\theta = \frac{a^2}{2} \cdot 2\pi = \underline{\underline{\pi a^2}}$$

* Vi kan generalisere kurvintegral til ytintegral:

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS$$

* Om vi parametiserer ytan med

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}$$

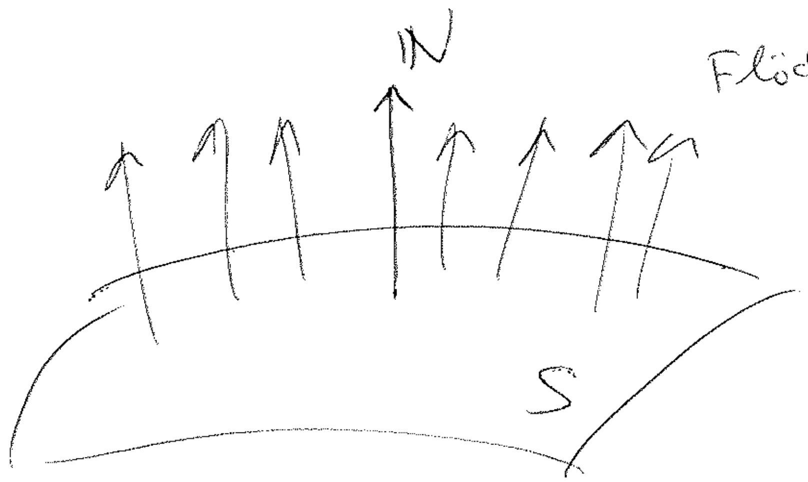
så kan vi beräkna ytintegral:

$$\underbrace{\iint_S}_{\text{ytintegral}} f(x,y,z)\,dS = \underbrace{\iint_D}_{\text{vanlig dubbelintegral}} f(\mathbf{r}(u,v)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du\,dv$$

* Om vi nu studerar ytintegraler över vektorfält

$$\iint_S \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}} \, dS$$

Så kan detta tolkas fysikaliskt som flödet av $\mathbb{F}$ ut genom S i riktning $\hat{\mathbb{N}}$:



Flödet av $\mathbb{F}$ genom S

* Notera att eftersom

$$dS = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du\,dv$$

$$\hat{\mathbb{N}} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|}$$

× Så kan flödesintegral skrivas som

välj normalriktning

$$\boxed{\iint_S \mathbb{F}\cdot \hat{\mathbb{N}}\, dS = \pm \iint_D \mathbb{F}(\mathbb{r}(u,v))\cdot\left(\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v}\right) du\,dv}$$

ytintegral

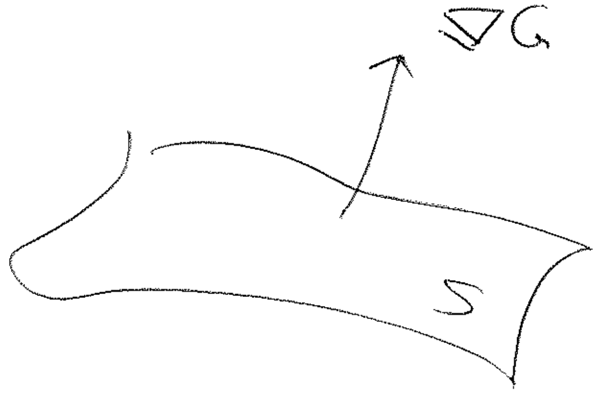
vanlig dubbelintegral

× Om S kan beskrivas som en nivåyta

$$G(x,y,z)=0$$

kan en normal till S fås genom gradienten:

$$\mathbb{N} = \nabla G$$



En enhetsnormal uppå eller nedåt kan nu konstrueras enligt:

$$\hat{\mathbb{N}} = \pm \frac{\mathbb{N}}{|\mathbb{N}|} = \pm \frac{\nabla G}{|\nabla G|}$$

Samtidigt har vi för en nivåyta med 1-1 proj. på xy-planet:

$$dS = \left| \frac{\nabla G}{\partial G/\partial z} \right| dx\,dy$$

Således kan flödesintegralen skrivas som följer utan att parametrisera S:

$$\boxed{\iint_S \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\, dS = \pm \underbrace{\iint_D \mathbb{F} \cdot \frac{\nabla G}{\partial G/\partial z}\, dx\,dy}_{\text{vanlig dubbelintegral}}}$$

* I fallet då ytan S är sluten kan vi använda Gauss sats:

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbb{F}\, dV = \oiint_{\partial D = S} \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\, dS$$

för att konvertera flödesintegralen till en vanlig trippelintegral över den volym D som omslutes av S.

Ofta är vänsterledet enklare att beräkna än högerledet!